Méthodes et outils de l'algèbre max-plus pour les SED

S. Lahaye

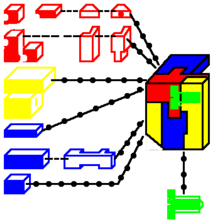
LARIS, Université d'Angers

Ecole MACS 2019 - Bordeaux

Introduction

Modélisation, analyse et optimisation de SED pour lesquels l'évolution dans le **temps** est principalement conditionnée par des **synchronisations**.

Assemblages dans les systèmes manufacturiers :



Assemblage possible quand les différentes pièces sont disponibles, i.e. à partir du maximum des dates de disponibilité

Rendez-vous dans une chaîne logistique :

Expédition depuis une plate-forme lors de la conjonction de l'approvisionnement et du moyen d'expédition.

Transmission de paquets dans un réseau informatique :

Reconstitution de paquets fragmentés à l'issue de leur acheminement selon des routages possiblement différents.

Correspondance dans un hub intermodal :

Départ d'un véhicule après avoir attendu les voyageurs en correpondance.

...

Plan

Algèbre max-plus

L'algèbre max-plus désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dotée de

- l'opération max notée $\oplus$ $\quad 10 \oplus 2 = 10$
- l'addition usuelle notée $\otimes$ $\quad 10 \otimes 2 = 12$

$(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \oplus, \otimes) = \mathbb{R}_{\max}$ est un **semi-anneau** $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}$

- $\oplus$ associative, commutative et $\varepsilon = -\infty$ pour zéro $\quad a \oplus \varepsilon = a$
- $\otimes$ associative et $e = 0$ pour élément unité $\quad a \otimes e = a$
- $\otimes$ distribue sur $\oplus$ $\quad a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$
- ε absorbant pour $\otimes$ $\quad a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

idempotent. $\quad a \oplus a = a$

Semi-anneau idempotent aussi appelé **dioïde**.

Quizz

- $e \oplus 3 \stackrel{?}{=}$
- $e(\varepsilon \oplus 10) = e \otimes (\varepsilon \oplus 10) \stackrel{?}{=}$
- $4^3 = 4^{\otimes 3} \stackrel{?}{=}$
- $\sqrt{3} = 3^{\otimes 1/2} \stackrel{?}{=}$

$\oplus$ n'est pas inversible

L'idempotence de $\oplus$ exclut son inversion :

$$
\begin{aligned}
a, b \in \mathbb{R}_{\max}, \quad a \oplus b = \varepsilon & \\
\Rightarrow a \oplus a \oplus b = a \oplus \varepsilon & \qquad \text{(en additionnant } a \text{ des 2 côtés)} \\
\Leftrightarrow a \oplus b = a & \qquad \text{contradiction ! (sauf si } a = b = \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Mais permet de définir la relation d'ordre $\preceq$ par

$$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad a \oplus b = b.$$

$\otimes$ est parfois inversible

Pour $a \neq \varepsilon$, $a \otimes -a = 0 = e$, mais dans la plupart des autres semi-anneaux idempotents, la multiplication $\otimes$ n'est pas inversible.

Opérations matricielles définies de façon conventionnelle

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ e & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & e \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & e \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ e & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 8 \end{pmatrix}$$

avec n le nombre de colonnes de A et de lignes de B.

Pour A carrée,

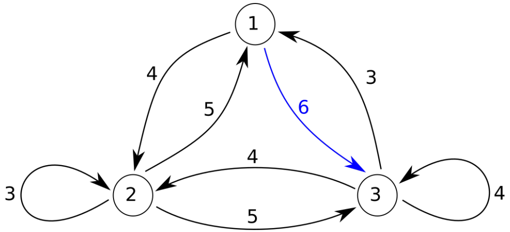
$$A^k = \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{k \text{ fois}} \text{ avec } A^0 = \begin{pmatrix} e & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & e \end{pmatrix}.$$

Matrices max-plus et graphes

$A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$

$\mathcal{G}(A)$: graphe orienté et pondéré avec n sommets et une arête (j, i) de poids A_{ij} si $A_{ij} \neq \varepsilon$

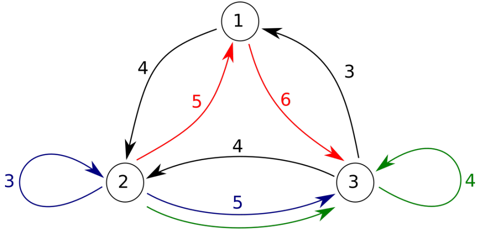
$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



Coefficients des puissances de A interprétés en termes de chemins optimaux dans $\mathcal{G}(A)$

A_{ij}^k poids maximaux des chemins de longueur k partant de j et terminant en i.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 \\ 10 & 9 & 8 \\ 10 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$



Outil logiciel

- Librairie Maxplus implémente un grand nombre d'algorithmes utiles pour les matrices max-plus :
  `http://www.cmap.polytechnique.fr/~gaubert/MaxplusToolbox.html`
- Intégrée à Scicoslab (dérivé de Scilab) :
  `http://www.scicos.org/downloads.html/`
- Contributeurs : Michael McGettrick, Guy Cohen, Stéphane Gaubert et Jean-Pierre Quadrat

Une matrice est déclarée comme suit sous Scilab : le préfixe # permet de lui donner le type max-plus.

```
-->A=#([%0 5 3 ; 4 3 4 ; 6 5 4])
 A  =


!.  5  3  !
!         !
!4  3  4  !
!         !
!6  5  4  !
```

%0 désigne $\varepsilon = -\infty$
%1 désigne $e = 0$
`%top` désigne $+\infty$

Les fonctions `%zeros()` et `%eye()` permettent de déclarer des matrices (max-plus) nulle et identité :

```
-->B=full(%zeros(3,3))
 B  =


!.  .  .  !
!         !
!.  .  .  !
!         !
!.  .  .  !
-->C=%eye(3,3)
 C  =


!0  .  .  !
!         !
!.  0  .  !
!         !
!.  .  0  !
```

`full()` permet de rendre pleine une matrice creuse

Les opérations entre matrices max-plus sont surchargées.

```
-->A+C
 ans  =

!0   5   3   !
!            !
!4   3   4   !
!            !
!6   5   4   !

-->A*B
 ans  =

!.   .   .   !
!            !
!.   .   .   !
!            !
!.   .   .   !
```

```
-->A*A
 ans  =

!9    8    9   !
!              !
!10   9    8   !
!              !
!10   11   9   !

-->A^2
 ans  =

!9    8    9   !
!              !
!10   9    8   !
!              !
!10   11   9   !
```

Coefficients des puissances de A interprétés en termes de chemins optimaux dans $\mathcal{G}(A)$

A_{ij}^{k} poids maximaux des chemins de longueur k partant de j et terminant en i.

A_{ii}^{k} poids maximaux des circuits de longueur k sur le sommet i.

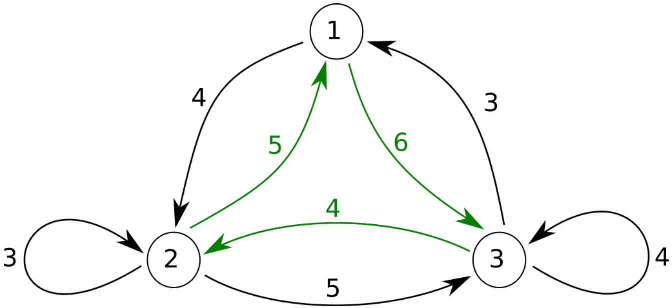
$Trace(A^k)$ $(= \bigoplus_{i=1}^{n} A_{ii}^{k})$ poids maximaux des circuits de longueur k.

Poids moyen maximal

$$\rho_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} Trace(A^k)^{1/k}$$

Poids moyen : poids divisé par la longueur.

Circuit critique : circuit de poids moyen égal à $\rho_{\max}(A)$.



$$\rho_{\max}(A) = \max\left(3, 4, \frac{9}{2}, \frac{12}{3}, \frac{15}{3}\right)$$

Un seul circuit critique.

- $\rho_{\max}(A)$ est une valeur propre de A : il existe un (ou plusieurs) vecteur(s) propre(s) associé(s) x tel que

$$Ax = \rho_{\max}(A)x.$$

- Toute valeur propre de A est inférieure ou égale à $\rho_{\max}(A)$.

Cas irréductible

A irréductible $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}(A)$ fortement connexe $\Leftrightarrow$ $\forall(i,j)$, $\exists m$ tel que $A_{ij}^m \neq \varepsilon$

- $\rho_{\mathsf{max}}(A)$ est l'unique valeur propre de A, notée souvent λ.
- Il peut exister plusieurs vecteurs propres associés à λ.
- Comportement asymptotique cyclique :

$$\exists K \text{ tel que } k \geq K \Rightarrow A^{k+c} = \lambda^c A^k$$

où c, appelée cyclicité, se déduit de la longueur des circuits critiques.

Algorithmes de Karp et de Howard implémentés (fonctions `karp()` et `howard()`) pour notamment évaluer les poids moyens des circuits et identifier des vecteurs propres.
Fonction `eigenspace()` automatise la recherche et renvoie :

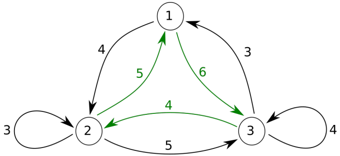
- une famille génératrice pour les vecteurs propres,
- le poids moyen maximal.

```
-->[v,rho]=eigenspace(A)
 rho  =
 5
 v  =
!0  !
!   !
!0  !
!   !
!1  !
```

```
// Test de consistance:
-->A*v==rho*v
 ans  =
  T
  T
  T
```

A irréductible : `rho` seule valeur propre ; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \dots$ vecteurs propres

$$\rho_{\max}(A) = \lambda = 5$$



Un seul circuit critique : c est égal à sa longueur, i.e. $c = 3$, et

$$\exists K \text{ tel que } k \geq K \Rightarrow A^{k+3} = 5^3 A^k = 15 A^k$$

Il n'existe pas d'algotithmes efficaces pour déterminer K qui peut être arbitrairement grand. On peut le rechercher par des essais :

```
-->15*A^1==A^4
 ans  =
  F T T
  T F T
  T T T

-->15*A^2==A^5
 ans  =
  T F T
  T T T
  T T T
```

```
-->15*A^3==A^6
 ans  =
  T T T
  T T T
  T T T

-->15*A^4==A^7
 ans  =
  T T T
  T T T
  T T T
```

Cas réductible

Décomposition de A en classes irréductibles $\Leftrightarrow$ décomposition de $\mathcal{G}(A)$ en composantes fortement connexes :

- spectre et espace propre plus complexes,
- une cyclicité asymptotique existe.

Théorie des systèmes max-plus linéaires

Analogue à la théorie des systèmes linéaires conventionnels :

Système dit **max-plus linéaire** (stationnaire) s'il satisfait le principe de superposition vis-à-vis de $\oplus$ et $\otimes$. Admet une réponse impulsionnelle, une fonction de transfert et une **représentation d'état** :

$$x(k+1) = Ax(k) \qquad \text{(système autonome)}$$

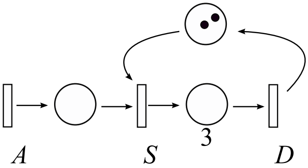
$$x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k) \qquad \text{(système non autonome)}$$

où $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, $x(k) \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times 1}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ et $u(k) \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times 1}$.

Graphes d'Evénements Temporisés (GET)

La classe des GET coïncide avec celle des systèmes max-plus linéaires stationnaires.

GET : sous-classe des Réseaux de Petri temporisés



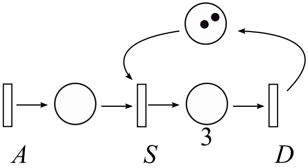
- chaque place a **exactement** une transition en amont et en aval
- les places peuvent avoir un temps de séjour minimal non nul (ici, un jeton doit séjourner au minimum 3 unités de temps dans la place $S \to D$)

Entrées, sorties

- Transition d'entrée (ou source) : transition sans place d'entrée
- Transition de sortie (ou puits) : transition sans place de sortie

Fonctionnement au plus tôt (ASAP)

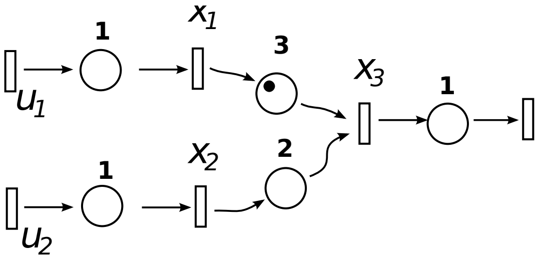
Toutes les transitions (excepté les entrées) sont franchies dès qu'elles sont franchissables.



C'est le mode de fonctionnement IMPLICITE dans la modélisation max-plus.

En résumé

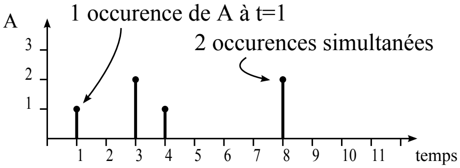
- Chaque place (cercle) a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie
- Un temps de séjour est associé aux places

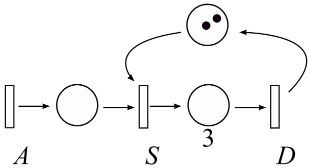


- Les transitions internes (x_1, x_2, x_3) sont franchies au plus tôt
  Le tir d'une transition consomme un jeton dans chaque place en entrée et produit un jeton dans chaque place en sortie
- Les événements d'entrée (u_1, u_2)

Modélisation des GET

On peut décrire les tirs des transitions d'un GET par une liste de paire (événement,date) .

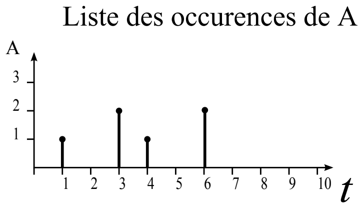


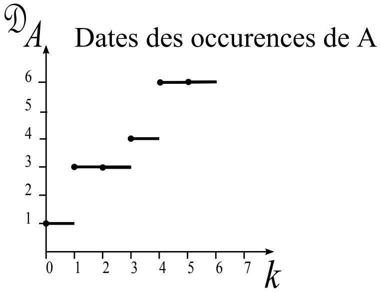


Liste des événements A : $(A,1)(A,3)(A,3)(A,4)(A,8)(A,8)$...

Fonction dateur : transcrit les dates successives des occurrences d'un événements
Pour l'événement A :

$$\mathcal{D}_A(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, t \mapsto \text{date de l'occurence numéro k de } A$$

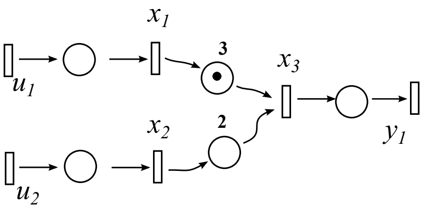




Par convention, le premier événement est numéroté k=0.
Les fonctions dateurs sont **monotones croissantes** :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathcal{D}_A(k+1) \geq \mathcal{D}_A(k)$$

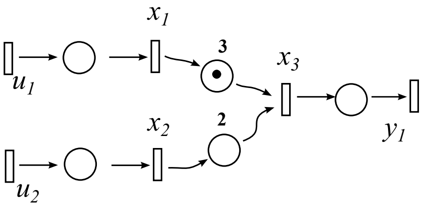
Relation entre les dateurs associés aux transitions d'un GET



$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{D}_{x_1}(k) & = & \mathcal{D}_{u_1}(k) \\
\mathcal{D}_{x_2}(k) & = & \mathcal{D}_{u_2}(k) \\
\mathcal{D}_{x_3}(k) & = & \max(\mathcal{D}_{x_1}(k-1)+3, \mathcal{D}_{x_2}(k)+2) \\
\mathcal{D}_{y_1}(k) & = & \mathcal{D}_{x_3}(k)
\end{array}
$$

Le deuxième tir de x_3 dépend du premier tir de x_1 et du deuxième tir de x_2

Dans l'algèbre max-plus

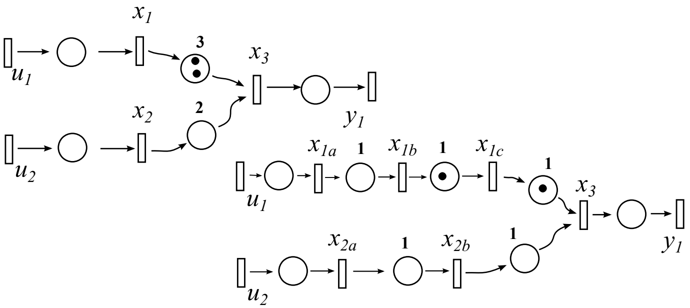


$x_1(k < 0) = x_2(k < 0) = x_3(k < 0) = \varepsilon$,

$$
\begin{array}{rcl}
x_1(k) & = & u_1(k) \\
x_2(k) & = & u_2(k) \\
x_3(k) & = & 3 \otimes x_1(k-1) \oplus 2 \otimes x_2(k) \\
y_1(k) & = & x_3(k)
\end{array}
$$

Forme standard des modèles

Sans changer le comportement, on peut augmenter le nombre de transitions internes pour que toute place ait **un temps de séjour de au plus 1 unité, et contienne au plus un jeton**.

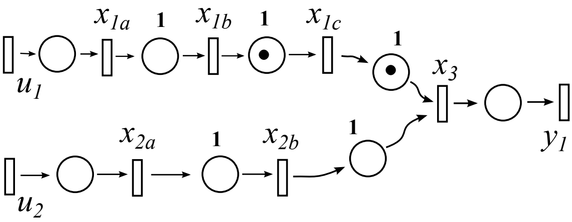


Remarque : le marquage initial décrit l'état du système à $t = -\infty$. Ce marquage peut être différent à $t \neq -\infty$ (fonctionnement au plus tôt). Par exemple, le jeton dans $x_{1b} \to x_{1c}$ à $t = -\infty$ sera dans la place $x_{1c} \to x_3$ à $t \neq -\infty$. D'où l'équivalence.

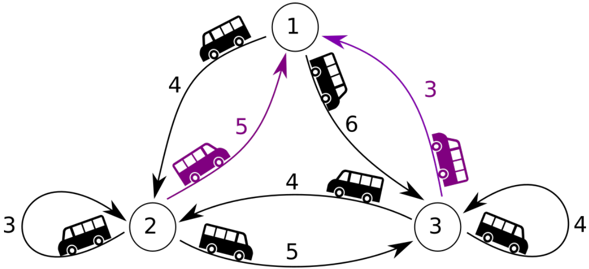
Forme standard des modèles

Grâce à cette technique, tout GET peut se ramener sous la forme

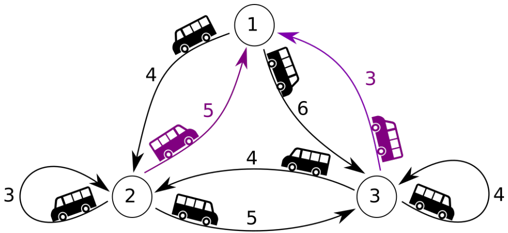
$$
\begin{aligned}
x(k) &= A_0 x(k) \oplus A_1 x(k-1) \oplus B u(k) \\
y(k) &= C x(k)
\end{aligned}
$$



Exemple : modélisation d'un réseau de bus



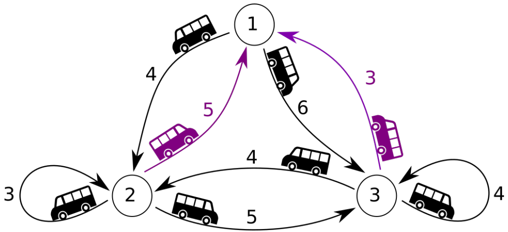
- Poids sur les arcs : durée de parcours.
- Correspondances entre les bus partant d'un même arrêt (sommet) : les bus violets vont s'attendre à l'arrêt 1 avant de repartir en sens inverse.
- Les bus repartent dès que la correspondance est assurée.



$x_1(k)$ date d'occurrence de la k-ième correspondance à l'arrêt 1 :

- il faut que le bus venant de l'arrêt 3 soit parti 3 u.t. plus tôt et donc que la correspondance précédente à l'arrêt 3 ait eu lieu 3 u.t. auparavant, d'où
$$x_1(k) \geq x_3(k-1) + 3$$
- *idem* pour le bus en provenance de l'arrêt 2
$$x_1(k) \geq x_2(k-1) + 5.$$

D'où $x_1(k) = \max(x_2(k-1)+5, x_3(k-1)+3) = 5x_2(k-1) \oplus 3x_3(k-1)$.



On obtient ainsi

$$\begin{array}{rcl} x_1(k) & = & 5x_2(k-1) \oplus 3x_3(k-1) \\ x_2(k) & = & 4x_1(k-1) \oplus 3x_2(k-1) \oplus 4x_3(k-1) \\ x_3(k) & = & 6x_1(k-1) \oplus 5x_2(k-1) \oplus 4x_3(k-1) \end{array}$$

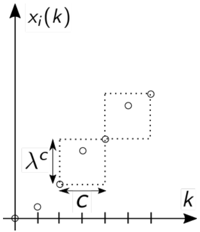
et

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}}_{x(k)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \end{pmatrix}}_{x(k-1)}.$$

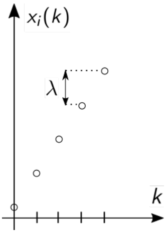
Un terme d'entrées $Bu(k)$ pourrait modéliser des tables d'horaires.

Eléments d'analyse basés la théorie spectrale

- Dates de démarrage ($x(0)$) quelconques : la cyclicité de A nous indique qu'au bout d'un certain temps, c bus partent toutes les $c \times \lambda$. λ *fournit un intervalle moyen entre deux départs.*



- Un vecteur propre $x(0)$ de A fournit des dates de démarrage telles qu'à chaque arrêt un bus part toutes les λ u.t. : *passage régulier aux arrêts, permet de déduire des tables d'horaires régulières.*



Quelques résultats importants

Etoile de Kleene

$$A^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A^k \quad avec \quad A^0 \text{ matrice identité.}$$

Solution de $x = Ax \oplus B$

Le plus petit x satisfaisant $x = Ax \oplus B$ est

$$x = A^* B.$$

- Solution valable dans n'importe quel semi-anneau idempotent (solution bien connue notamment dans les semi-anneaux de langages).
- Si tous les coefficients de A sont inférieurs ou égaux à e, ou si $\mathcal{G}(A)$ ne comporte pas de circuit de poids strictement positif, alors A^* est finie.

Obtention d'une récurrence standard pour les systèmes max-plus linéaires

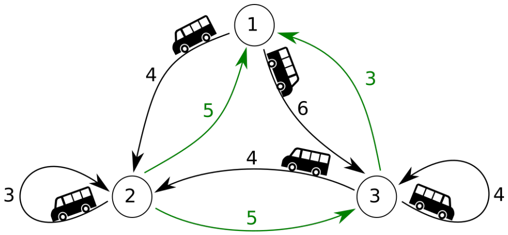
On a obtenu des équations d'état de la forme :

$$x(k) = A_0 x(k) \oplus A_1 x(k-1).$$

En sélectionnant la plus petite solution donnée par

$$x(k) = A_0^* A_1 x(k-1)$$

on obtient la récurrence standard qui traduit le fonctionnement au plus tôt (les plus petites dates possibles).



Pas de bus initialement sur les tronçons verts, d'où

$$\begin{aligned} x_1(k) &= 5x_2(k) \oplus 3x_3(k) \\ x_2(k) &= 4x_1(k-1) \oplus 3x_2(k-1) \oplus 4x_3(k-1) \\ x_3(k) &= 6x_1(k-1) \oplus 5x_2(k) \oplus 4x_3(k-1) \end{aligned}$$

et

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}}_{x(k)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \end{pmatrix}}_{A_0} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}}_{x(k)} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix}}_{A_1} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \end{pmatrix}}_{x(k-1)}$$

```
-->A0=#([%0 5 3 ; %0 %0 %0 ;
 %0 5 %0])
 A0  =

!.  5  3  !
!         !
!.  .  .  !
!         !
!.  5  .  !

-->A1=#([%0 %0 %0 ; 4 3 4 ;
 6 %0 4])
 A1  =

!.  .  .  !
!         !
!4  3  4  !
!         !
!6  .  4  !
```

```
-->star(A0)
 ans  =

!0  8  3  !
!         !
!.  0  .  !
!         !
!.  5  0  !

-->star(A0)*A1
 ans  =
!12  11  12  !
!            !
!4   3   4   !
!            !
!9   8   9   !
```

```
// test de consistance
-->Sol=star(A0)*A1*#([1;1;1])
 Sol  =
!13  !
!    !
!5   !
!    !
!10  !
```

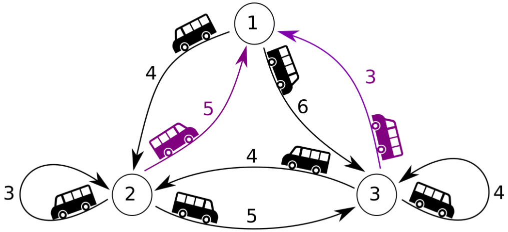
```
-->Sol==A0*Sol+A1*#([1;1;1])
 ans  =
  T
  T
  T
```

Solution de $Ax \preceq B$

Le plus grand x satisfaisant $Ax \preceq B$ est

$$x = A \backslash\!\!\!\circ B.$$

- Solution valable dans n'importe quel semi-anneau idempotent.
- Solution particulière de la théorie de la résiduation qui permet de définir des pseudo-inverses pour certaines applications isotones (qui préservent l'ordre) définies sur des ensembles ordonnés (dont les semi-anneaux idempotents).



$$x(k) = Ax(k-1)$$

- Considérons $z(k_f)$ précisant des échéances pour les k_f-ièmes correspondances : $z(k_f)_i$ spécifie la date la plus tardive à laquelle on souhaite que la k_f-ième correspondance ait lieu à l'arrêt i.
- Comme
$$x(k_f) = A^{k_f} x(0),$$
les dates de démarrage les plus tardives permettant de garantir les échéances sont données par
$$x(0) = A^{k_f} \mathbin{\circ\!\!\backslash} z(k_f).$$

```
-->k_f=10
 k_f  =

    10.

-->z_k_f=#([60;62;63])
 z_k_f  =

!60  !
!    !
!62  !
!    !
!63  !
```

```
-->sol=(A^k_f)\z_k_f
 sol  =

!11  !
!    !
!10  !
!    !
!12  !

-->A^k_f*sol
 ans  =

!60  !
!    !
!61  !
!    !
!62  !
```

Transformées et fonction de transfert

On dispose de transformées analogue à la transformée en $\mathcal{Z}$.
Tout GET peut être décrit par

$$\begin{array}{rcl} X & = & AX \oplus BU \\ Y & = & CX \end{array}$$

où

- U, X et Y sont les transformées des dateurs associés au GET
- A, B et C sont à valeurs dans un dioïde particulier.

Puisque $x = a^* b$ est la plus petite solution de $x = ax \oplus b$, le vecteur X peut s'exprimer directement à partir de U

$$X = A^* BU = (A^0 \oplus A \oplus A^2 \oplus ...)BU.$$

et

$$Y = CA^* BU.$$

La matrice $H = CA^* B$ est la **matrice de transfert du GET**, elle décrit le comportement entrée-sortie du système.

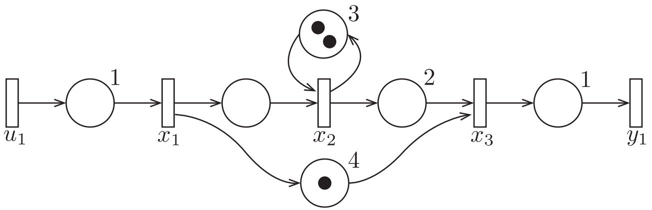
Outils associés

- ScicosLab + MinMaxgd
  - Télécharger ScicosLab : `cermics.enpc.fr/~jpc/scilab-gtk-tiddly/files/scicoslab4.4.1-install.exe`
  - Télécharger MinMaxGD : `perso-laris.univ-angers.fr/~hardouin/minmaxgd1.1.zip`
- C++
  - CodeBlocks : `www.codeblocks.org/downloads/26`
  - MinMaxGD : `perso-laris.univ-angers.fr/~hardouin/libminmaxgd03042015.zip`
- En ligne
  - `perso-laris.univ-angers.fr/~lhommeau/#misc`

Commande en boucle ouverte

Objectif

Soit z une trajectoire de sortie désirée. On cherche une commande u_1 telle que la sortie du système soit la plus proche possible de z tout en respectant la contrainte $y_1 \leq z$.



Commande en juste-à-temps (IEEE TAC, Cohen et al. 1989)

Solution

- Soit

$$\begin{cases} x &= Ax \oplus Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

- Le transfert est donné par :

$$H = CA^*B.$$

- La solution optimale, u_{opt}, est donnée par

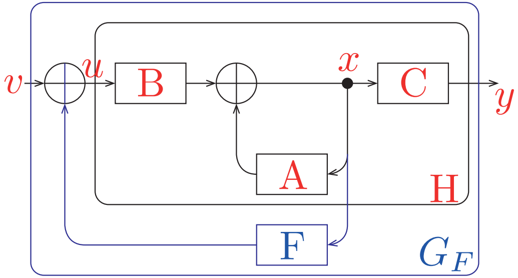
$$u_{opt} = (CA^*B)\backslash z.$$

- C'est la plus grande entrée qui satisfait

$$y_1 = Hu_{opt} = (CA^*B)u_{opt} \leq z.$$

Commande en boucle fermée (Cottenceau, 2001)

Poursuite de modèle - Retour d'état



Boucle ouverte

$$\begin{cases} x &= Ax \oplus Bu \\ y &= Cx \\ y &= CA^*Bu = Hu \end{cases}$$

Boucle fermée

$$\begin{cases} u &= Fx \oplus v \\ x &= (A \oplus BF)^*Bv \\ y &= C(A \oplus BF)^*Bv \end{cases}$$

Objectif

Soit G_{ref} le comportement désiré en boucle fermée. Calculer le plus grand correcteur de type retour d'état, F, tel que

$$C(A \oplus BF)^*B = G_F \preceq G_{ref}.$$

Commande en boucle fermée (Cottenceau, 2001)

Poursuite de modèle - Retour d'état

Correcteur retour d'état optimal

- Propriété : $(a \oplus b)^* = a^*(ba^*)^* = (a^*b)^*a^*$.
- On a

$$\begin{aligned} C(A \oplus BF)^*B \leq G_{ref} \iff C(A^*BF)^*A^*B \leq G_{ref} \\ \iff CA^*B(FA^*B)^* \leq G_{ref} \iff (FA^*B)^* \leq (CA^*B)\backslash G_{ref} \\ \iff A^*B(FA^*B)^* \leq A^*B((CA^*B)\backslash G_{ref}) \\ \iff (A \oplus BF)^*B \leq A^*B((CA^*B)\backslash G_{ref}). \end{aligned}$$

- $\hat{\mathcal{G}} = A^*B((CA^*B)\backslash G_{ref})$ est le plus grand transfert entre u et x qui respecte la contrainte $(\leq G_{ref})$ et qui appartient à $\mathrm{Im}A^*B$ ("atteignable").

Commande en boucle fermée (Cottenceau, 2001)

Poursuite de modèle - Retour d'état

Proposition

Soit $G_{ref} \geq CA^*B = H$. Le plus grand correcteur F tel que $(A \oplus BF)^*B \preceq G_{ref}$ est donné par

$$\begin{aligned} \hat{F} &= B \backslash \hat{\mathcal{G}} / \hat{\mathcal{G}} \\ &= B \backslash (A^*B((CA^*B) \backslash G_{ref})) / (A^*B((CA^*B) \backslash G_{ref})). \end{aligned}$$

Correcteur neutre

Si $G_{ref} = H$, le plus grand correcteur est donné par

$$\hat{F} = H \backslash H / (A^*B) .$$

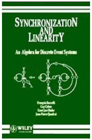
Ce correcteur permet de retarder, le plus possible, l'entrée des jetons dans le système tout en préservant la sortie.

Plus encore

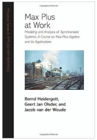
Beaucoup d'autres structures/concepts ont été adaptés pour la commande des systèmes max-plus linéaires :

- retour de sortie
- commande de systèmes incertains
- rejet de perturbation
- commande avec un observateur
- commande sous contraintes (état, commande, durée,...)
- ...

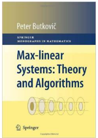
Bibliographie (partielle et partiale)



Synchronization and linearity : An Algebra for Discrete Event Systems, François Baccelli, Guy Cohen, Geert Jan Olsder and Jean-Pierre Quadrat, Wiley, 1992 Stock épuisé, téléchargeable depuis `https://www.rocq.inria.fr/metalau/cohen/SED/book-online.html`



Max Plus at Work : Modeling and Analysis of Synchronized Systems : A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications, Bernd Heidergott, Geert Jan Olsder and Jacob van der Woude, 2005, Princeton



Max-linear Systems : Theory and Algorithms, Peter Butkovic, 2010, Springer

Bibliographie (partielle et partiale)

- Support du cours *Théorie algébrique des systèmes à événement discrets* de Guy Cohen :
  `https://www.rocq.inria.fr/metalau/cohen/documents/CoursSED.pdf`

- Support de cours *Algèbre max-plus et systèmes à événements discrets* de Stéphane Gaubert :
  `http://www.cmap.polytechnique.fr/ gaubert/deamines.html`

- Texte introductif *Modélisation à l'aide de systèmes (max,+) linéaires* de Jean Mairesse :
  `https://www-apr.lip6.fr/ mairesse/Article/modelDRET.ps.gz`

- Nombreux manuscrits de thèse sur le sujet.